

Leçon 213

Espaces de Hilbert. Exemples d'applications.

I - Espaces de Hilbert

II - Bases hilbertiennes

III - Applications en analyse fonctionnelle

Dev 1 : Théorème de Grothendieck

Dev 2 : Espace de Bergman

I - Espaces de Hilbert

1) Espaces préhilbertiens : CS, Pythagore, parallélogramme, Riesz-Fischer, [dev 1](#), exemples [\[Rom24\]](#)

2) Projection sur un convexe fermé : proj, supplémentaire orthogonal, Riesz, app : adjoints, dualité $L^p - L^q$ [\[Rom24\]](#), [\[BP12\]](#)

3) Adjoint d'un endomorphisme : def, auto-adjoints, exemples, normes, stabilité de l'orthogonal [\[HL97\]](#)

II - Bases hilbertiennes

1) Définition et propriétés : def, G-S, exemples, critère via l'orthogonal, Bessel, Parseval [dev 2](#) [\[Rom24\]](#)

2) Séries de Fourier : def $L^2_{2\pi}$, nouvelle norme et ps + toujours Hilbert, Weierstrass trigo, (e^{inx}) base hilbertienne, def $c_n(f)$ + calcul, Parseval, equation de la chaleur [\[El 08\]](#)

III - Applications linéaires dans les espaces de Hilbert

1) Formes linéaires et convergence faible : def convergence faible, faible compacité, Banach-Alaoglo, description des faiblement compacts, minimisation fonctionnelle convexe, contre-ex [\[HL97\]](#), [\[All05\]](#)

2) Théorème spectral : def opérateur compact, lemmes puis thm spectral, exemple [\[HL97\]](#)

Références

- [All05] Grégoire ALLAIRE. *Analyse numérique et optimisation*. Editions de l'Ecole polytechnique, 2005.
- [BP12] Marc BRIANE et Gilles PAGÈS. *Analyse théorie de l'intégration : Convolution et transformée de fourier : Cours & exercices corrigés*. Vuibert, 2012.
- [El 08] Mohammed EL AMRANI. *Analyse de fourier dans les espaces fonctionnels niveau M1*. Ellipses, 2008.
- [HL97] Francis HIRSCH et Gilles LACOMBE. *Éléments d'analyse fonctionnelle : Cours et exercices*. Masson, 1997.
- [Rom24] Jean-Etienne ROMBALDI. *Mathématiques pour l'agrégation Externe : Analyse*. De Boeck supérieur, 2024.